REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

La Comprensión de la Relación Inversa en la División en Edades Tempranas

Mariana Fuentes[1]
Patricia Olmos[2]

1) Universitat Internacional de Catalunya, España
2) Universitat Autònoma de Barcelona, España

Date of publication: October 24th, 2019
Edition period: October 2019-February 2020

To cite this article: Fuentes, M., & Olmos, P. (2019). La comprensión de la relación inversa en la division en edades tempranas. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *8*(3), 267-292. doi: 10.4471/redimat.2019.4546

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2019.4546

REDIMAT, Vol. 8 No. 3 October 2019 pp. 267-292

La Comprensión de la Relación Inversa en la División en Edades Tempranas

Mariana Fuentes
Universitat Internacional de Catalunya

Patricia Olmos
Universitat Autònoma de Barcelona

(*Recibido: 31 Julio 2019; Aceptado: 07 Octubre 2019; Publicado: 24 Octubre 2019)*

Abstract

El objetivo de este trabajo es contribuir al estudio de la génesis de la comprensión de la relación inversa entre los términos de la división en una muestra de niños de primer y segundo curso de educación primaria en una escuela catalana, a través de las justificaciones que los niños dan a sus respuestas a los problemas. Se ha diseñado una intervención en función de dos condiciones de justificación -de la propia respuesta y de la respuesta del adulto- aplicada a una muestra de 45 niños, 21 de primero y 24 de segundo, con edades entre 7:06 y 8:05. Se realiza un Pretest y dos fases de intervención donde se presentan 16 situaciones problema. Los resultados establecen que los niños de segundo curso cometen menos errores que los de primero y parten de una mejor comprensión de la relación inversa. La tipología de errores varía en función del curso y de las fases del estudio. La justificación por la relación inversa es más frecuente en segundo y en la última fase de intervención. Entre las dos condiciones de feedback, la justificación de la respuesta del adulto es la que mejor favorece la comprensión.

Keywords: Relación inversa, división, edades tempranas, matemáticas, intervención

2019 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2019.4546

REDIMAT, Vol. 8 No. 3 Octubre 2019 pp. 267-292

The Understanding of the Inverse Relation in the Division in Early Years

Mariana Fuentes
Universitat Internacional de Catalunya

Patricia Olmos
Universitat Autònoma de Barcelona

(*Received: 31 July 2019; Accepted: 07 October 2019; Published: 24 October 2019)*

Resumen

This work aims to contribute to the study of the genesis of the understanding of the inverse relation between the terms of the division in a sample of children of 1st and 2nd grade of primary education in a Catalan school, through the justifications that children give to their answers to the problems. An intervention has been designed based on two justification conditions -of the own response and of the adult's response- applied to a sample of 45 children, 21 of first and 24 of second, aged between 7:06 and 8:05. A Pretest and two phases of intervention are carried out where 16 problem situations are presented. The results show that second-year children make fewer mistakes than first-year children and start from a better understanding of the inverse relation. The typology of errors varies depending on the course and the phases of the study. The justification for the inverse relation is more frequent in the second course and in the last phase of intervention. Between the two feedback conditions, the justification of the adult response is the one for better understanding.

Palabras clave: Inverse relation, división, early years, mathematics, intervention

2019 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2019.4546

La comprensión de los conceptos de división y multiplicación se confunden frecuentemente con la habilidad para operar con los algoritmos correspondientes. Sin embargo, los niños tienen conocimientos informales acerca de la multiplicación y la división antes de que se les enseñe en la escuela y antes de saber utilizar los algoritmos propios (Lautert, Spinillo, & Correa, 2012; Bakker, van den Heuvel-Panhuizen, & Robitzsch, 2014). Saben establecer correspondencias (Park & Nunes, 2001), que forman la base del razonamiento multiplicativo y saben repartir, que es el esquema subyacente a la división (Nunes & Bryant, 1996).

Según Vergnaud (1990, 1997), la comprensión de los conceptos matemáticos involucra considerar la situación que hace que el concepto tenga significado, las invariantes operacionales que caracterizan a un concepto dado y la representación utilizada por los individuos cuando tratan con estas situaciones. De las invariantes operacionales que rigen el concepto de la división (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985; Harel & Confrey, 1994; Kouba, 1989; Nunes & Bryant, 1996), el presente trabajo se ocupa de la comprensión de la covariación inversa entre el tamaño de las partes y el número de partes, es decir, de la relación inversa entre cociente y divisor, en niños que aún no han recibido instrucción sobre la división, siendo sus objetivos:

1. Averiguar si existe una relación entre el tipo de error que los niños y niñas cometen y las justificaciones que dan a sus respuestas
2. Relacionar la proporción y tipología de errores en función de variables como el curso académico, la fase del estudio o las condiciones aplicadas.
3. Identificar si existen diferencias entre las justificaciones que los niños dan en función de las condiciones aplicadas (justificación de la propia respuesta; justificación de la respuesta de la entrevistadora).
4. Confirmar el patrón evolutivo señalado por estudios anteriores respecto de la comprensión de la relación inversa y un patrón evolutivo en el tipo de errores que cometen en este proceso en una muestra de niños de una escuela catalana.

La investigación sobre el tema presenta interés no sólo en relación con la comprensión del concepto de la división, sino, además, por estar involucrada en la comprensión de otros conceptos multiplicativos como proporciones, fracciones y cantidades intensivas (ejemplos: precio por kilo, grado de dulzura de una bebida).

Los estudios previos revisados sobre el tema sugieren que se encontrará un patrón de desarrollo en los tipos de errores cometidos por los niños, que existe una tendencia a mantener las respuestas (correcta o incorrecta) independientemente de las variaciones en las tareas (efectos del tamaño de los divisores), que los niños se plantean hipótesis firmes sobre que el incremento del divisor incrementa el cociente y, finalmente, que la comprensión de la relación inversa entre cociente y divisor mejora a medida que avanzamos en curso académico. La evolución esperada consistirá en pasar por la fase previa de relación directa a la relación inversa donde la concepción del niño es considerar que a mayor divisor mayor cociente. Los niños justificarán, primero, con la relación directa, para luego pasar a justificar con la relación inversa.

A partir de las contribuciones de estos estudios previos y de las características concretas de este trabajo (condiciones y fases), se quiere averiguar qué papel tienen dos condiciones diferentes de justificación –de la propia respuesta o de la respuesta de la entrevistadora– en la comprensión de la relación inversa.

Consideraciones Teóricas

Las Dificultades de los Niños Respecto de la Relación Inversa entre Cociente y Divisor

Las relaciones inversas –se trata de una relación inversa porque cuando una cantidad se incrementa (el número de receptores-divisor), la otra cantidad decrece (el tamaño de las partes a repartir-cociente)– son difíciles para los niños pequeños. Resulta más fácil para ellos realizar juicios sobre las relaciones directas (Sophian, Garyantes, & Chang, 1997). Por ello, uno de los errores más frecuentes que los niños cometen al resolver problemas de división es la aplicación de la relación directa –cuantos más receptores entre los que repartir, más cantidad recibirán– (Stavy & Tirosh, 2000).

Comprender las relaciones inversas es el "primer paso hacia la comprensión de la división" (Bryant, 1997, p. 65). Para comprender la división no basta con poseer el esquema de 'repartir', sino que implica además entender la relación inversa entre cociente y divisor (Correa, Nunes, & Bryant, 1998). Al repartir, los niños proceden según la correspondencia uno a uno, pero tanto la multiplicación como la división, que forman parte del razonamiento multiplicativo, involucran la correspondencia uno-muchos y requieren operar con tres cantidades distintas: dos o más variables en una ratio fija entre ellas (Nunes & Bryant, 1996).

Lautert, Spinillo y Correa (2012) resumen en tres las dificultades que la literatura señala que presentan los niños para resolver problemas de división. La primera se relaciona con el tipo de problema (división partitiva o cuotitiva) y el tipo de cantidades que involucre (discretas o continuas). La literatura (Brown, 1981; Fischbein et al., 1985; Nesher, 1988 citados en Correa, Nunes, & Bryant, 1998; Skoumpoudi & Sofikiti, 2009) señala que los problemas partitivos son más fáciles para los niños que los cuotitivos porque involucran el esquema de acción de repartir, noción que los niños entienden desde una edad temprana debido a la práctica en situaciones sociales. Por lo tanto, los niños tienen menos experiencia con los problemas cuotitivos, la cual adquieren más tarde a través de la instrucción formal. Respecto del tipo de cantidades involucradas, Kornilaki y Nunes (2005) concluyen que los niños pueden generalizar el razonamiento aplicado a la división con cantidades discretas, a la división con cantidades continuas, a pesar de la diferencia entre los procedimientos de reparto.

La segunda dificultad tiene que ver con la comprensión de la covariación inversa entre los términos cuando el dividendo permanece constante (Correa, Nunes, & Bryant, 1998; Kornilaki & Nunes, 1997; Squire & Bryant, 2002). Es decir, siempre que operamos con números enteros positivos, con los que los niños aprenden a operar, cuanto mayor es el número de partes, en la cual un todo ha de ser dividido, menor es el tamaño de las partes.

La tercera dificultad se relaciona con el tratamiento del resto (Carraher & Schliemann, 1991; Campbell & Fraser, 1997; Desforges & Desforges, 1980; Li & Silver, 2000; Silver, 1988; Silver, Schapiro, & Deutsch, 1993; Spinillo & Lautert, 2002, 2006). En este caso, las dificultades se relacionan con las múltiples formas de representación del mismo y las formas de expresarlo, que no siempre se incorporan en la resolución del problema.

Este trabajo, planteado como un estudio de intervención con niños de primero y segundo curso de Educación Primaria, tiene como finalidad contribuir al estudio de la génesis de la comprensión de la relación inversa entre los términos de la división a través de las justificaciones que los niños dan a sus respuestas a los problemas, –estableciendo dos condiciones de justificación– y favorecer su aprendizaje. Como señalan Squire y Bryant (2002) "es importante considerar tanto juicios (respuestas) como justificaciones, como criterio para la atribución de conocimiento a los niños en la investigación Piagetiana" (Smith, 1992, citado en Squire y Bryant (2002) (nuestra traducción). Aun considerando que la literatura señala la conveniencia de escoger como criterio las respuestas, frente a las justificaciones (Brainerd, 1973; Siegel, McCabe, Brand & Matthews, 1978; Thomas & Horten, 1997, citados en Squire & Bryant, 2002) porque basar las decisiones en las justificaciones siempre subestimaría la competencia cognitiva de los niños, se considera que las justificaciones complementan las respuestas y nos dan indicios importantes sobre la comprensión de los niños.

Metodología

A partir de un estudio de intervención, se planteó a los participantes en este trabajo una serie de problemas de división partitiva con cantidades discretas representados, figurativamente, en tres fases consecutivas: Pretest, 1ª Intervención y 2ª Intervención. Las intervenciones se realizaron en función de dos condiciones, cada una con un grupo de niños. La primera condición atendía a la justificación que los niños daban de sus propias respuestas. La segunda atendía a la justificación de la respuesta de la entrevistadora. La justificación de las respuestas implica siempre un proceso de meta-cognición que merece ser estudiado. En este caso, nos interesaba averiguar cómo actúa la justificación de la respuesta de la entrevistadora; es decir, si esta condición podría favorecer el surgimiento del conflicto cognitivo en el niño para hacerle avanzar en la comprensión de la relación inversa en la división en mayor medida que la justificación de la propia respuesta (Siegler, 1995).

Participantes

Los participantes en este trabajo fueron cuarenta y cinco niños de educación primaria escolarizados en una escuela de la ciudad de Barcelona. Ningún niño de la muestra presentaba necesidades educativas específicas. Se seleccionaron 21 niños de primer curso (4 niñas y 17 niños con una media de edad = 7:06; rango: 7:11-7:00) y 24 niños de segundo curso (10 niñas y 14 niños con una media de edad = 8:05; rango: 8:10-8:00). Ninguno había recibido instrucción educativa en la división.

Asimismo, la muestra inicial y final del estudio varió en función de las fases del mismo: Pretest, 1ª Intervención y 2ª Intervención. Los 45 niños de la muestra participaron del Pretest y los que pasaron a las sesiones de intervención fueron aquellos que, en esta primera fase: a) tenían un índice de error superior al 25% de los problemas presentados; b) las justificaciones que daban a sus respuestas, en su mayoría, no hacían referencia a la relación inversa entre cociente y divisor. La tabla 1 presenta un resumen de la muestra en las distintas fases:

Tabla 1.
Distribución de la muestra en las fases del estudio

Fase	Muestra
Pre-test	1º curso – 22 niños 2º curso – 24 niños
1ª Intervención	1º curso – 13 niños
2ª Intervención	2º curso – 9 niños

Dos de los niños de primer curso, después de haber realizado la primera prueba del Pretest (equivalencia numérica) y no superarla, fueron excluidos de la muestra dado que la comprensión de la relación inversa exige la adquisición previa de ésta, quedando en primer curso una muestra final de 20 alumnos.

Procedimiento de Trabajo y Materiales

Las tres fases del estudio fueron llevadas a cabo en el segundo trimestre del curso académico, con una diferencia temporal de dos semanas entre el Pretest y la 1ª intervención, y de una semana entre la 1ª y la 2ª intervención. En cada una de las etapas se establecieron una serie de tareas interventivas con cada uno de los niños participantes que se presentaron de forma individual y se desarrollaron en una sala en la que únicamente estaban presentes los niños y las dos investigadoras. Todas las tareas fueron registradas en soporte audio-visual.

Tabla 2.
Distribución de las sesiones de trabajo y pruebas interventivas

Fases	Tarea interventiva
Pre-test	1. Equivalencia numérica (repartir) 2. Contar 3. Situaciones problema (una condición): La fundamentación de la propia respuesta sin retroalimentación
1ª Intervención	Situaciones problema (con dos condiciones):
2ª Intervención	1. Con justificación de la propia respuesta y retroalimentación. 2. Con retroalimentación y justificación de la respuesta de la experimentadora

En el Pretest los niños realizaron tres tareas. En la primera –*tarea de equivalencia numérica*– (Frydman & Bryant, 1988) los niños debían demostrar que sabían repartir en partes iguales los elementos presentados. Aquellos que no superaban esta tarea eran excluidos de la muestra. En la segunda tarea –*contar*– se les pedía que contaran hasta 40 con el objetivo de comprobar que conocían la cadena numérica más allá del número 24, el número máximo de elementos que se les presentaría en la tercera tarea. Finalmente, la tercera tarea –*situaciones problema, una condición*– consistió en la resolución, por parte de los niños, de una serie de problemas de división partitiva con cantidades discretas, adaptadas de Correa, Nunes y Bryant (1998), con el propósito de evaluar su comprensión de la relación inversa entre cociente y divisor en la división. Este mismo tipo de problemas fueron utilizados en la primera y en la segunda intervención.

Para ello, se diseñaron 16 fichas que representaban figurativamente dos situaciones matemáticas diferenciadas por el divisor (las dos situaciones podían presentar el mismo divisor o un divisor diferente) (véanse Figuras 1 a 3) con el fin de que los niños las compararan.

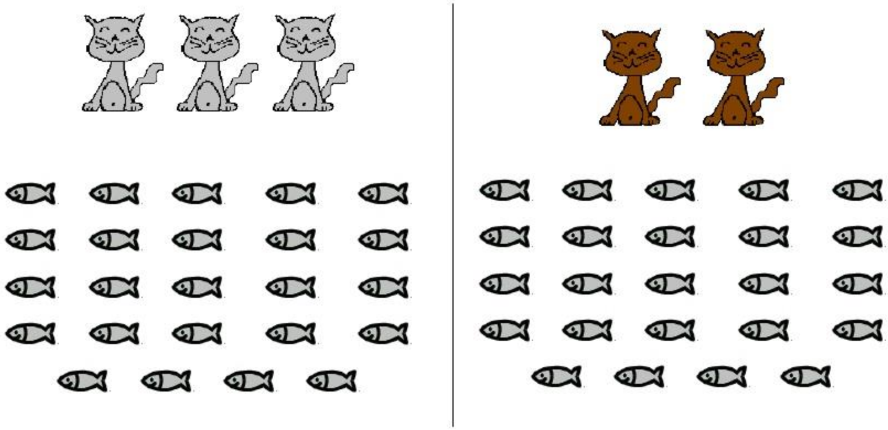

Figura 1. Diferente divisor (diferencia reducida), dividendo 24

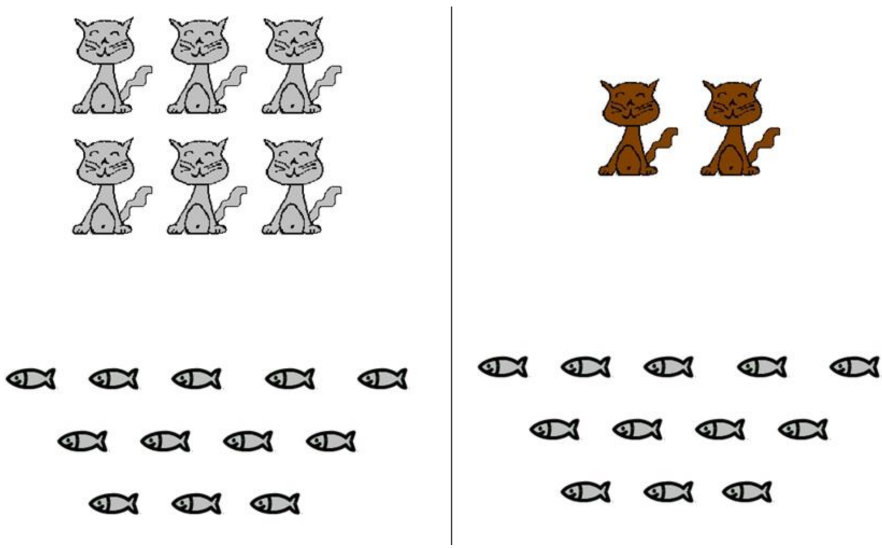

Figura 2. Diferente divisor (diferencia amplia), dividendo 12

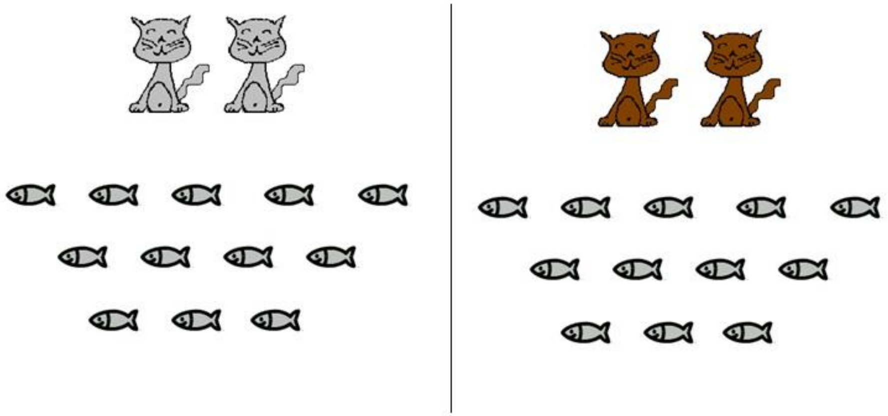

Figura 3. Igual divisor, dividendo 12

Asimismo, se variaba la diferencia numérica entre los divisores. En unos casos la diferencia era amplia (Figura 2) y en otros, reducida (Figura 1), siguiendo los criterios de Kornilaki y Nunes (2005). Además, el dividendo era el mismo dentro de cada una de las 16 fichas siendo en ocho de ellas igual a 12 y en las restantes igual a 24 para el Pretest y la segunda intervención, e igual a 12 y 20 para la primera intervención. La tabla 3 presenta los 16 problemas.

Tabla 3.
Situaciones matemáticas fase Pre-test, 1ª intervención y 2ª intervención

Pre-test y 2ª Intervención	Diferente divisor	Dividendo 12	12 3(2), 12 2(6), 12 4(3), 12 3(6)*
		Dividendo 24	24 2(3), 24 6(2), 24 3(4), 24 3(6)
	Mismo divisor	Dividendo 12	12 2(2), 12 3(3), 12 4(4), 12 6(6)
		Dividendo 24	24 2(2), 24 3(3), 24 4(4), 24 6(6)

Tabla 3.
Situaciones matemáticas fase Pre-test, 1ª intervención y 2ª intervención (…/…)

ª Intervención	Diferente divisor	Dividendo 12	12 2(3), 12 6(2), 12 4(3), 12 3(6)
		Dividendo 20	20 4(2), 20 2(5), 20 10(2), 20 5(10)
	Mismo divisor	Dividendo 12	12 2(2), 12 3(3), 12 4(4), 12 6(6)
		Dividendo 20	20 2(2), 20 4(4), 20 5(5), 20 10(10)

* Nota: 12 3(2) Léase, 12 elementos a repartir (dividendo) entre dos receptores diferentes (divisores) en una misma situación problema. Primera situación con divisor igual a 3. Segunda situación con divisor igual a 2.

Las tres fases presentaban diferente figuración (gatos-peces, conejos-zanahorias y ratones-quesos). Asimismo, en la segunda intervención se utilizaron los mismos problemas que en el Pretest.

La entrevistadora presentaba una ficha al niño con una situación problema con la siguiente consigna: *Aquí tenemos dos fiestas de gatos, la fiesta de los gatos grises y la fiesta de los gatos marrones. En cada una de las fiestas hay 12 sardinas* (o 24 dependiendo de la ficha). *Los gatos grises se reparten las sardinas de manera que todos comen lo mismo y los gatos marrones se reparten las sardinas de manera que todos comen lo mismo*. Seguidamente, la entrevistadora señalaba un gato de cada color y le preguntaba al niño o niña: *¿Piensas que el gato marrón y el gris comerán lo mismo, el gris más que el marrón o el marrón más que el gris?* Una vez el niño daba su respuesta, la experimentadora le preguntaba: *¿Cómo lo has sabido?*

Los niños debían decir si el cociente (la porción repartida) era el mismo, mayor o menor entre las dos situaciones presentadas en cada una de las fichas. No se les pedía que dieran un resultado numérico. Ello permitía conocer la relación que establecía cada uno de los niños entre el cociente y el divisor.

La fase Pretest del estudio se fundamentaba en una condición, la justificación de la propia respuesta sin retroalimentación. En la 1ª y 2ª intervención se les presentaba a los niños los mismos problemas, pero con dos condiciones de retroalimentación diferentes. Un primer grupo daba su respuesta y la justificaba, recibiendo a continuación retroalimentación por parte de la entrevistadora. Un segundo grupo, en cambio, daba su propia respuesta y después la entrevistadora daba la respuesta correcta (coincidente o no con la del niño) con la consigna: *A mí me parece que los gatos grises comen más que los marrones* y se le pedía al niño que justificase esa respuesta: *¿Cómo crees que lo he sabido?*

Procedimiento de Análisis

Para entender el procedimiento de análisis aplicado en este estudio, es preciso partir de la descripción de las dos principales variables de análisis: los errores y las justificaciones.

Errores

Las respuestas permitían identificar tres tipos de errores: error igual (EI) (*en las situaciones en las que el divisor es diferente, el cociente será el mismo*) –este es el error Tipo I en la denominación de Correa, Nunes y Bryant, (1998)–. El error opuesto con divisor diferente (EODD) (*en las situaciones en las que el divisor es diferente, el cociente es mayor cuando el divisor es mayor*) –corresponde al error tipo II en la denominación de Correa, Nunes y Bryant, (1998)–. Si tenemos en cuenta las situaciones en las que el divisor es igual, entre las respuestas de los niños aparece un tercer tipo de error, que hemos denominado error opuesto con divisor igual (EODI) (*en las situaciones en las que el divisor es igual, el cociente es diferente)*. El error opuesto con divisor igual es un tipo de error que aparece en las respuestas de los niños participantes y que no ha sido reportado en estudios anteriores. La clasificación de los errores fue realizada por las personas responsables de esta investigación que categorizaron, por separado, cada uno de los errores de los niños sobre sus respuestas a los problemas. Posteriormente, se contrastó el análisis realizado por ambas personas consensuándose los criterios y reformulando las categorías en los casos en los que no había consenso. Finalmente, se volvieron a categorizar los errores y se obtuvo un acuerdo del 95%.

Justificaciones

En la tabla 4 se explican las justificaciones a las respuestas dadas por los niños. Se consideró muy útil averiguar las justificaciones que daban los niños a sus respuestas, o a la respuesta de la entrevistadora, como una forma complementaria al análisis de los errores para poder entender su razonamiento (Squire y Bryant, 2002). Como se ha señalado más arriba, en esta investigación, se pidió a los niños justificar sus respuestas como una forma de obtener toda la información posible acerca de su forma de comprender las tareas. El tipo de justificación solicitada –de la propia respuesta o de la respuesta de la entrevistadora–, es una variable que ha sido considerada en el análisis y constituye un aporte de este trabajo.

Tabla 4.
Tipo de justificación a las respuestas (basado en Correa, Nunes y Bryant, 1998 Kornilaki & Nunes, 2005)

Irrelevante (IRR)	No existe justificación en la respuesta que tengan en consideración aspectos matemáticos. Ejemplos: *'Tienen más hambre unos gatos que otros', 'un gato come más rápido', 'Porque lo he pensado con mi cabeza'*.
No lo sé (NS)	Manifiesta no tener conocimiento de porqué da la respuesta. Ejemplo: *'No lo sé'*
Relación inversa (RI)	Justificación esperada en las situaciones en las que el divisor es diferente; a menor divisor, mayor cociente y a la inversa. Esta justificación es la que confirma la comprensión de la relación inversa entre cociente y divisor. Ejemplos: *'El gato gris come más que el marrón porque son menos gatos y todos tienen el mismo número de sardinas'*.
Relación cuantitativa no inversa (RCNI)*	Independientemente del número divisor, el cociente siempre es el mismo. Siempre es con divisor diferente. Ejemplos: *'Los gatos marrones y grises comen lo mismo porque hay el mismo número de sardinas. El gato marrón come cuatro sardinas y el gris también cuatro sardinas'*

Tabla 4.
Tipo de justificación a las respuestas (basado en Correa, Nunes y Bryant, 1998 Kornilaki & Nunes, 2005) (…/…)

Relación directa (RD)	Cuando el dividendo es diferente, a mayor dividendo mayor cociente. Siempre es con divisor diferente. Ejemplo: *'El gato gris come más porqué hay más gatos grises'*
Reparto cuantitativo divisor diferente (RCDD)*	Cuando el divisor es diferente, el niño asigna un cociente repartiendo el dividendo. Ejemplo: *'El gato gris come seis y el gato marrón come cuatro'*
Reparto cuantitativo divisor igual (RCDI)*	Cuando el divisor es igual, el niño asigna un cociente repartiendo el dividendo. Ejemplo: *''El gato gris como seis y el gato marrón también come seis'*
Equivalencia dividendo	En situaciones donde hay el mismo divisor, el cociente es el mismo teniendo en cuenta el dividendo. Ejemplo: *'Todos los gatos comen lo mismo porque hay igual número de sardinas'*
Equivalencia divisor	En situaciones donde hay el mismo divisor, el cociente es el mismo teniendo en cuenta el divisor. Esta justificación es otra manera de justificar la comprensión de la relación inversa a partir del mismo divisor. Ejemplo: *'Todos los gatos comen lo mismo porque hay igual número de gatos'*

* Nuevas categoría de justificación incorporada al estudio

Las categorías de justificaciones presentadas también fueron validadas por las personas responsables de esta investigación que categorizaron, por separado, cada una de las justificaciones de los niños sobre sus respuestas a los problemas. Posteriormente, se contrastó el análisis realizado por ambas personas consensuándose los criterios y reformulando las categorías en los casos en los que no había consenso. Finalmente, se volvieron a categorizar las justificaciones según las nuevas categorías y se obtuvo un acuerdo del 95%. La categorización de las justificaciones también se realizó de acuerdo con la establecida en estudios previos (Correa, Nunes y Bryant, 1998), pero se vio la necesidad de introducir tres nuevas categorías de justificación en función de que algunas de las respuestas no podían clasificarse según categorías previamente establecidas. Éstas fueron: Relación Cuantitativa No

Inversa (RCNI), Reparto cuantitativo Divisor Diferente (RCDD), Reparto Cuantitativo Divisor Igual (RCDI); que se describen en la tabla 4.

A partir de estas dos variables de análisis (los errores y las justificaciones), se aplicó análisis estadístico descriptivo e inferencial (estadísticos no paramétricos) de los datos. Con relación al análisis estadístico descriptivo, se procedió a consignar la frecuencia de los aciertos, errores y justificaciones dadas por la muestra en función del curso académico y las fases del estudio. En relación con el análisis estadístico inferencial, se procedió a la aplicación de dos pruebas no paramétricas, especialmente útiles dado el tamaño muestral reducido de este estudio, para determinar si existían o no diferencias significativas en relación con la tipología de errores y justificaciones de los dos grupos muestrales de este estudio: primer y segundo curso.

Partiendo del supuesto de que las medianas de ambos grupos muestrales son iguales; es decir, no ofrecen diferencias significativas con relación a la tipología de errores y de justificaciones, los dos no paramétricos aplicados fueron Mann-Whitney (alternativa a la prueba paramétrica T para muestras independientes, para comprobar la heterogeneidad de ambas muestras) y Kruskall-Wallis (alternativa a la prueba paramétrica ANOVA de un factor, para determinar si las medianas de los dos grupos muestrales diferían entre sí).

Resultados

Los resultados de la fase Pretest permiten establecer que los alumnos de segundo curso presentan, de partida, un mayor dominio de la relación inversa entre cociente y divisor que los de primero (el 59.1% del alumnado de segundo ya había adquirido la comprensión de la relación inversa frente al 40.9% del alumnado de primero). Por lo tanto, de los 44 alumnos que aplicaron el Pretest, 22 pasaron a las fases de intervención, de los cuales 13 eran de primero y 9 de segundo.

El análisis de la frecuencia de aciertos en cada una de las fases del estudio confirmó que los alumnos mejoraron la comprensión de la relación inversa a través de las intervenciones (24.4% de aciertos en el Pretest, 35.6% en la 1ª intervención y 40% en la 2ª intervención). Por otra parte, cuando el dividendo era menor, la cantidad de aciertos era superior (22.2%, 35.6% y 37.8% para las fases Pretest, 1ª intervención y 2ª intervención respectivamente).

El análisis de la frecuencia de errores por curso académico, en cada una de las fases, mostró que el Pretest es la fase con mayor porcentaje de errores en ambos cursos y que éstos disminuyen en las fases de intervención, tal y como muestra la tabla 5. Este resultado permite inferir cierta progresión en la comprensión de la relación inversa entre cociente y divisor a medida que los alumnos pasan por las intervenciones y, de nuevo, que los alumnos de segundo presentan un mayor dominio de la relación inversa en todas las fases.

Tabla 5.
Porcentaje de errores por curso académico y fases

	Pretest	1ª intervención	2ª intervención
Primero	35.20%	28.36%	17.79%
Segundo	14.32%	10.42%	5.55%

La aplicación de los estadísticos no paramétricos no establece diferencias significativas entre primero y segundo y las tres tipologías de error ($p > .05$ en ambos casos), por lo que pueden aceptarse los supuestos de partida que consideran, en este caso, que la tipología de error no difiere en función del curso académico.

Con relación a la justificación del alumnado a sus respuestas y los errores que comete, según el curso académico y las fases del estudio (durante la fase Pretest no se les pedía a los niños que justificasen sus respuestas aunque se analizaron las justificaciones que daban espontáneamente a las situaciones-problema), se observó que, como se muestra en la tabla 6, las relaciones más frecuentes se daban entre: a) el Error Opuesto con Divisor Igual y la justificación Irrelevante (IRR), los niños que cometen este tipo de error no toman en consideración el tamaño del divisor siendo coherente que no hagan justificaciones en términos matemáticos (justificación irrelevante), que aparece en 1er curso; b) el Error Opuesto con Divisor Diferente y la justificación por la Relación Directa *-el cociente es mayor cuando el divisor es mayor-* los niños dan una justificación matemática coherente a la tipología de error; c) el Error Igual y la justificación Relación Cuantitativa No Inversa, independientemente de que el divisor sea diferente, en ambas situaciones presentadas en el problema, los niños lo justifican en función del reparto equitativo del dividendo, teniendo en cuenta que el dividendo es siempre el mismo, que se identifica con mayor frecuencia en el Pretest.

Tabla 6.
Relación porcentual entre el tipo de error y la justificación en función del curso académico y la fase del estudio

		1º Curso (20 alumnos)			2º Curso (24 alumnos)		
Fase pretest		EODI %	EODD %	EI %	EODI %	EODD %	EI %
	No justifica	1.88	0.63	0.31			
	IRR	2.81	1.88	3.44	1.30	0.52	0.26
	RI						
	RCNI			5.63			2.60
	RD		3.75			3.13	
	NS	1.88	1.56	2.50			0.26
	RCDD		3.75	4.06		0.78	1.30
	RCDI	0.94			1.04		
	EDIVIDENDO						
	EDIVISOR				0.26		
Fase 1ª interv.		1º Curso (13 alumnos)			2º Curso (9 alumnos)		
		EODI %	EODD %	EI %	EODI %	EODD %	EI %
	No justifica						
	IRR	3.85	4.33	4.33	4.86	0.69	0.69
	RI						0.69
	RCNI			0.96			
	RD		0.96			3.47	
	NS	2.40	1.92	3.85	0.69	0.69	
	RCDD		1.44	2.40			0.69
	RCDI						
	EDIVIDENDO						
	EDIVISOR						

Tabla 6.
Relación porcentual entre el tipo de error y la justificación en función del curso académico y la fase del estudio (…/…)

		1º Curso (20 alumnos)			2º Curso (24 alumnos)		
Fase 2ª interv.		EODI %	EODD %	EI %	EODI %	EODD %	EI %
	No justifica						
	IRR	3.37	1.92	4.33			
	RI			0.48		1.39	
	RCNI			0.48			
	RD					2.78	0.69
	NS	1.92	0.96	1.92		0.69	0.69
	RCDD			0.96			
	RCDI						
	EDIVIDENDO						
	EDIVISOR				0.69		

Asimismo, el análisis de las justificaciones en función del curso académico y las fases del estudio establece que la justificación por la Relación Inversa (RI) sólo se identifica en las fases de intervención, que presentan con mayor frecuencia los alumnos de segundo para los que la justificación por la RI aparece durante la primera intervención y se incrementa en la segunda. En el grupo de primero, la justificación por la RI únicamente aparece en la 2ª intervención, siendo el porcentaje de respuesta muy bajo.

Respecto de la justificación Irrelevante (IRR), ésta es más frecuente en los alumnos de primero en todas las fases, siendo significativo su incremento durante la primera intervención, momento en que se les pide justificar su respuesta en función de las condiciones; es decir, cuando el alumnado de primero se enfrenta a la necesidad de justificar su respuesta, lo hace en base a justificaciones no matemáticas. En el caso de los alumnos de segundo, se observa cómo este tipo de justificación IRR desaparece en la 2ª intervención. Los estadísticos no paramétricos identifican diferencias estadísticamente significativas, entre primero y segundo curso, únicamente en las justificaciones dadas durante la 2ª intervención (p = .042; para ambas pruebas) con un rango medio superior en los alumnos de segundo curso (= 14.17) respecto a los de primero (= 8.63). Este resultado parece establecer que los alumnos de segundo justifican con mayor frecuencia que los de primero en esta última fase, lo que puede sugerir que poseen mayor conciencia de su propio razonamiento.

Finalmente, la posible relación existente entre el tipo de justificación y la condición de la justificación (con justificación propia del alumno o con justificación de la entrevistadora), los estadísticos no paramétricos establecen una relación entre el tipo de justificación y la condición de ésta en cada una de las intervenciones (1ª intervención, p = .818; 2ª intervención, p = .190). Es decir, se perciben diferencias debidas a las dos condiciones. Como se aprecia en la Tabla 7, las respuestas por la relación inversa sólo aparecen en la segunda intervención y condicionada por el tipo de justificación (justificación de la respuesta de la entrevistadora).

Tabla 7.
Relación entre tipo de justificación y condición de justificación en las fases de intervención

	1ª Intervención		2ª Intervención	
	Justificación propia	Justificación entrevistadora	Justificación propia	Justificación entrevistadora
NS	40%	27.3%	60%	45.5%
IRR		18.2%		9.1%
RI				18.2%
RD	20%	9.1%	10%	
RCDD	40%	45.5%	30%	18.2%

Discusión y Conclusiones

El estudio aquí presentado quiere analizar la génesis de la comprensión de la relación inversa entre los términos de la división y explorar si existe un patrón evolutivo de la misma en función de las justificaciones que los niños dan a las respuestas a los problemas.

Los objetivos partían de averiguar si existe una relación entre el tipo de error que los niños y niñas cometen y las justificaciones que dan a sus respuestas. En segundo lugar, se proponía relacionar la proporción y tipología de errores en función de variables como el curso académico, la fase del estudio o las condiciones aplicadas. En tercer lugar, se buscaba identificar si existen diferencias entre las justificaciones que los niños dan en función de las condiciones aplicadas (justificación de la propia respuesta; justificación de la respuesta de la entrevistadora). Por último, se pretendía confirmar el patrón evolutivo señalado por estudios anteriores respecto de la comprensión de la relación inversa y un patrón evolutivo en el tipo de errores que cometen en este proceso en una muestra de niños de una escuela catalana. Para dar cumplimiento al primer objetivo, como condición previa, se amplió la clasificación de errores y justificaciones que establecían estudios anteriores como los de Correa, Nunes y Bryant (1998) y Kornilaki & Nunes (2005) en función de las respuestas de los participantes en esta investigación. A la clasificación de errores que aparece en estos estudios, este trabajo agrega el tipo Error Opuesto con Divisor Igual, que implica que en las situaciones en las que el dividendo y el divisor son iguales en las dos situaciones que se comparan, los niños responden que el cociente es diferente. La relación entre los tipos de error y las justificaciones en este trabajo coinciden con los estudios antes mencionados, donde se establece una relación entre el error opuesto con divisor diferente y la justificación por la relación directa (categoría V de Correa et al., 1998); el error opuesto con divisor igual y la justificación irrelevante (categoría II de Correa et al., 1998); el error igual y la justificación por la relación cuantitativa no inversa (categoría III de Correa et al., 1998). Los resultados confirman que antes de que los niños alcancen la comprensión de la relación inversa y la justificación por la misma, aparece el error opuesto con divisor diferente y la justificación por la relación directa; es decir, que la relación directa es precursora de la relación inversa. La relación entre el error opuesto con divisor igual y la justificación irrelevante, de acuerdo con Squire y Bryant (2002), pone de manifiesto que cuando el alumnado se enfrenta a la necesidad de justificar su respuesta, lo haga con criterios no matemáticos. Finalmente, la relación entre el error igual, que se ha identificado en este trabajo, y la justificación por la relación cuantitativa no inversa, evidencia que el niño no tiene en cuenta la relación entre los términos de la división y resuelve en base a un reparto equitativo y de forma independiente cada una de las situaciones matemáticas que aparecen en las fichas. Es lo que Correa y otros (1998) establecen como la distinción conceptual entre compartir y dividir.

Esta idea queda reforzada con el análisis de las justificaciones. En el marco de este trabajo, se muestra que la mayoría de los niños razonaban sobre relaciones en vez de usar el conteo cuando emitían sus juicios. Los niños son capaces de razonar acerca de cantidades que están representados por números naturales sin tener que contar los elementos.

Respecto a la evolución de las justificaciones de este grupo de niños entre las diferentes fases del estudio, se establece que la justificación por la relación inversa es más frecuente entre los niños de segundo, confirmando que la comprensión de la relación inversa entre cociente y divisor mejora a medida que avanzamos en curso académico (Correa, Nunes, & Bryant, 1998; Kornilaki & Nunes, 2005).

En cuanto al segundo objetivo, proporción y tipología de errores, los resultados confirman que la proporción de errores está en función de variables como la edad y las fases de intervención. En edades más tempranas la proporción de errores es mayor (Correa et al., 1998; Kornilaki & Nunes, 2005; Squire & Bryant, 2002), así como en las fases iniciales de la intervención de este trabajo. El Pretest es la fase con mayor porcentaje de errores en ambos cursos y los errores disminuyen en las fases de intervención. Entre la primera y la segunda intervención, el porcentaje de errores entre los alumnos de primero disminuye un tercio y entre los de segundo, disminuyen a la mitad.

La tipología de errores cometidos varía en función del curso académico. Los alumnos de primero tienden a cometer tanto errores opuestos (con divisor igual y diferente) como errores iguales, mientras que entre los alumnos de segundo curso prevalece el tipo de Error Opuesto con Diferente Divisor, tal cual señalan otros estudios que sugieren un patrón de desarrollo en los tipos de errores cometidos por los niños. Los niños que cometían errores ‘a mayor divisor, mayor cociente’ de forma consistente tenían una hipótesis firme, si bien, errónea, sobre que el incremento del divisor incrementa el cociente (Correa, Nunes, & Bryant, 1998; Squire & Bryant, 2002; Stavy & Tirosh, 2000). Sophian y otros (1997) también reportan este tipo de error, con la diferencia que en su estudio los niños responden de una forma no sistemática, lo cual significaría que no se plantean ninguna hipótesis. El presente trabajo confirma este patrón evolutivo de errores. Otros trabajos plantean la posibilidad de un razonamiento “transductivo” (*transductive reasoning*) para explicar estos resultados donde la respuesta errónea se debe al 'fracaso del niño en construir un sistema consistente de relaciones entre las diferentes variables en juego en la situación' (Kornilaki & Nunes, 2005, p. 403). No obstante, en el marco de este trabajo no se aborda esta cuestión, siendo interesante poder plantearla en estudios futuros.

Otras investigaciones han estudiado los efectos del tamaño de la diferencia entre divisores (grande *vs* pequeña), el tipo de representación utilizada (dibujos *vs* números) y el modo de respuesta (producción verbal *vs* selección de la respuesta correcta) en el desempeño de los niños en esta tarea (Squire & Bryant, 2002). En la presente investigación se analizó la influencia del tamaño del dividendo en el grado de dificultad que los niños mostraban a la hora de resolver los problemas planteados. A partir de los resultados, se observa que el número de aciertos disminuye cuando el dividendo es mayor, y, por tanto, el nivel de dificultad para los alumnos de la muestra es también mayor, lo que viene a confirmar que el nivel de dificultad crece en función de un tamaño mayor del dividendo (Kornilaki & Nunes, 2005) y que los niños aprenden, en primer término, la invariante de la división con un dividendo menor. Este hallazgo completa los resultados que los estudios anteriormente mencionados han obtenido sobre otras condiciones que afectan el desempeño de los niños en la resolución de tareas de división.

Este trabajo, además, muestra que la justificación por la relación inversa únicamente se da durante las fases de intervención, especialmente en la segunda, lo cual muestra que la comprensión de la relación inversa, por parte de los niños que en el Pretest aún no la habían alcanzado, mejora a medida que avanzamos en las fases de intervención.

En cuanto a la influencia de las condiciones aplicadas (justificación de la propia respuesta; justificación de la respuesta de la entrevistadora) en las justificaciones que los niños dan a la respuesta, Lautert, Spinillo y Correa (2012) pusieron a prueba una intervención con niños de tercero de educación primaria que experimentaban dificultades con el concepto de división. La intervención se basaba en situaciones de resolución de problemas en las cuales se hicieran explícitos para los niños los principios invariantes de la división. En esta línea de investigación, el presente trabajo ha demostrado la influencia de estas condiciones. Los resultados sugieren que el tipo de justificación que el alumno da a sus respuestas varía en función del tipo de retroalimentación aplicada. En el caso de los alumnos de primero no se detectan diferencias importantes entre ambas condiciones (con justificación de la propia respuesta o de la respuesta del adulto) en relación con la justificación por la relación inversa. En el caso de los alumnos de segundo, aquellos que deben justificar la respuesta del adulto, tienden a justificar con mayor frecuencia por la relación inversa. El motivo de requerir la justificación de la respuesta de la entrevistadora era investigar el efecto del conflicto cognitivo así suscitado (Siegler, 1995; Squire & Bryant, 2002). Los resultados parecen mostrar que, en la condición de la respuesta del adulto, los niños tienden a justificar con mayor frecuencia con argumentos de relación inversa, lo cual parece apoyar el hecho de que la justificación de la respuesta del adulto favorece el surgimiento del conflicto cognitivo que promueve una mayor comprensión.

Tal como señala Nunes (2008), los breves estudios de intervención son de gran valor en la investigación porque permiten a los investigadores saber qué tipos de comprensión pueden construir los niños si se les da un tipo específico de guía en la interacción con un adulto (Cooney, Grouws & Jones, 1988; Steffe & Tzur, 1994; Tzur, 1999; Yakel, Cobb, Wood, Wheatley & Merkel, 1990 citados en Nunes 2008).

Los resultados muestran la existencia de un patrón evolutivo en la comprensión de la relación inversa en función de las justificaciones que dan los niños a sus propias respuestas o a la respuesta de la entrevistadora frente a la situación- problema, aunque consideramos importante seguir estudiando el efecto de estos dos tipos de condiciones de justificación ya que, a la luz de los resultados, se muestra su potencialidad y se abre una línea de investigación sobre la interacción de la condición de justificación con otras variables, como la edad o el curso académico.

La condición de justificación de la respuesta del adulto puede favorecer el aprendizaje de las invariantes de la división, con importantes implicaciones educativas en niños de edades tempranas.

Agradecimientos

Las autoras agradecen a los profesores y alumnos del CEIPM Tres Pins por su participación en esta investigación.
Esta investigación se ha realizado dentro del Programa Ramón y Cajal convocatoria 2007 [número RYC-2007-01638], subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia.

Referencias

Bakker, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2014). First-graders' knowledge of multiplicative reasoning before formal instruction in this domain. *Contemporary Educational Psychology, 39*, 59–73. doi: 10.1016/j.cedpsych.2013.11.001

Brainerd, C.J. (1973). Judgements and explanations as criteria for the presence of cognitive structures. *Psychological Bulletin*, 79, 172-179.

Brown, M. (1981). Numbers operations. In K. M. Hart (Ed), *Children's understanding of Mathematics* (pp. 11-16). London: John Murrayp.

Bryant, P. (1997). Mathematics understanding in the nursery school years. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics: an international perspective* (pp. 53-67). New York, NY: Psychology Press.

Campbell, S., & Fraser, S. (1997). On preservice teachers' understandings of division with remainder. In E. Pehkonen (Ed). *Proceedings of the 21h Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp.177-184). Lahti, Finland: PME.

Carraher, D. W., & Shliemann, A. D. (1991). *Teachers´ guide to divide and conquer software*. New York: Sunburst Communications.

Cooney, T. J., Grouws, D. A., & Jones, D. (1988). An agenda for research on teaching mathematics. In D. A. Grouws & T. J. Cooney (Eds.), *Effective mathematics teaching* (pp. 253–261). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between divison terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology, 90*, 321-329. doi: 10.1037/0022-0663.90.2.321

Desforges, A., & Desforges, C. (1980). Number-based strategies of sharing in young children. *Education Studies, 6* (2), 97-109. doi: 10.1080/0305569800060201

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (1), 3-17. doi: 10.2307/748969

Frydman, O., & Bryant, P. E. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development*, *3*, 323-339. doi: 10.1016/0885-2014(88)90019-6

Harel, G., & Confrey, J. (1994). *The development of multiplicative reasoning in the development of mathematics*. New York, NY: New York press.

Kouba, V. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division work problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (2), 147-158. doi: 10.2307/749279

Kornilaki, E., & Nunes, T. (2005). Generalising principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development*, *20*, 388-406. doi: 10.1016/j.cogdev.2005.05.004

Lautert, S., Spinillo A., & Correa, J. (2012). Children's difficulties with division: an intervention study. *Educational Research*, *3* (5), 447-456.

Li, Y., & Silver, E. A. (2000). Can younger students succeed where older students fail? In examination of third graders'solutions of a division with-remainder (DWR) problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, *19*, 233- 246. doi: 10.1016/S0732-3123(00)00046-8

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-161). Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Nunes, T. (2008). Understanding rational numbers. Att erövra världen. Grundläggande färdigheter i läsning; skrivning och matematik; 26-27 november 2007; Linköping. Linköping University Electronic Press; Linköpings universitet: 23-52

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.

Park, J., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, *16*, 763-773. doi: 10.1016/S0885-2014(01)00058-2

Siegel, L.S. McCabe, A.E., Brand, J. & Matthews, J. (1978). Evidence for the understanding of class inclusion in preschool children: Linguistic factors and training effects. *Child Development*, 49, 688-693.

Siegler, R. (1995). How Does Change Occur: A Microgenetic study of Number Conservation. *Cognitive Psychology, 28*, 225-273. doi: 10.1006/cogp.1995.1006

Silver, E.A. (1988). Solving story problems involving division with remainders: the importance of semantic processing and referential mapping. In J. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds). *Proceedings of the 10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 127-133). London, United Kingdom: PME.

Silver, E. A., Shapiro, L. J., & Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders: an examination of middle school students' solution processes and their interpretations of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24* (2), 117- 135. doi: 10.2307/749216

Skoumpoudi, C., & Sofikiti, D. (2009). Young children's material manipulating strategies in division task. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds). *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 5, pp. 137-145). Thessaloniki, Greece: PME.

Smith, L. (1992). Judgements and justifications: criteria for the attribution of children's knowledge in Piagetian research. *British Journal of Developmental Psychology*, 10, 1-23. doi: 10.1111/j.2044-835X.1992.tb00559.x

Sophian, C., Garyantes, D., & Chang, C. (1997). When three is less than two: Early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology, 33*, 731-744. doi: 10.1037/0012-1649.33.5.731

Spinillo, A. G., & Lautert, S. L. (2002). Representations and solving procedures in word division problems: comparing formal and informal knowledge in children. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, p. 318). Norwich, United Kingdom: PME.

Spinillo, A. G., & Lautert, S. L. (2006). Exploring the role played by the remainder in the solution of division problems. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds). *Proceedings of the 30th*

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol 5, pp. 153-162). Praga, Czech Republic: PME.

Squire, S., & Bryant, P. (2002). The influence of sharing on children's initial concept of Division. *Journal of Experimental Child Psychology*, *81*, 1-43. doi: 10.1006/jecp.2001.2640

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How Students (Mis-) Understand Science and Mathematics: Intuitive Rules*. New York, NY: Teachers College Press.

Steffe, L. P., & Tzur, R. (1994). Interaction and children's mathematics. *Journal of Research in Childhood Education*, *8*(2), 99–116. doi: 10.1080/02568549409594859

Thomas, H. & Horten, J.J. (1997). Competency and the class inclusion task: Modeling judgements and justifications. *Developmental Psychology*, *33*(6), 1060-1073. doi: 10.1037/0012-1649.33.6.1060

Tzur, R. (1999). An Integrated Study of Children's Construction of Improper Fractions and the Teacher's Role in Promoting That Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(4), 390–416.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.) *Learning and teaching mathematics: an international perspective* (pp. 5-28). New York, NY: Psychology Press.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G., & Merkel, G. (1990). The importance of social interaction in children's construction of mathematical knowledge. In T. J. Cooney & C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s. 1990 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 12– 21). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mariana Fuentes es Profesora Contratada Doctora, en la Universitat Internacional de Catalunya, España.

Patricia Olmos es Profesora Agregada en la Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Dirección de contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. **Dirección Postal**: Universitat Internacional de Catalunya, Facultad de Educación, Terré, 11-19 (08017) Barcelona. **Email:** mafuentes@uic.es